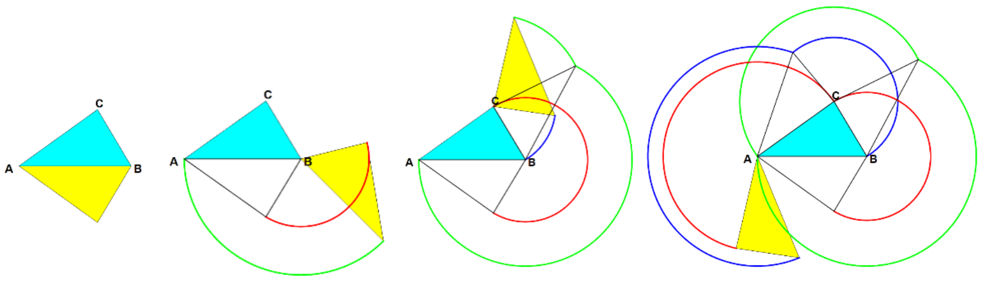
自分自身の周りを一回転する三角形の頂点の軌跡の性質

数学班　浅見 茉利　廣橋 遥奈　山本 賢治

1. 研究目的

周の長さが一定である三角形が，自分自身と合同な三角形の周りを，滑ることなく一回転するときの頂点の軌跡の性質を調べる
- ① 頂点の軌跡の長さが最小になる三角形の形状
- ② 頂点の軌跡で囲まれる扇形の面積が最小になる三角形の形状



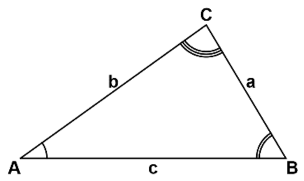
△ABC の周りを回転する合同な三角形と 3 つの頂点の軌跡

2. 準備

《記号》

l_A，l_B，l_C　：頂点 A, B, C の軌跡の長さ

s_A，s_B，s_C　：頂点 A, B, C の軌跡によって囲まれる扇形の面積



《定理2の証明に利用する補題》

閉区間 $[p,q]$ で定義された関数 $f(x)$ が下に凸であるとき，

関数　$f(x)+f(p+q-x)$　は，

定義域の中点　$x=\frac{p+q}{2}$　で最小値　$2f\left(\frac{p+q}{2}\right)$　をとる

定義域の端点　$x=p$　または　$x=q$　で最大値　$f(p)+f(q)$　をとる

3. 角の大小と頂点の軌跡の長さおよび扇形の面積の関係

［定理 1］　△ABC において，$a+b+c=1$, $A \leqq B \leqq C$ とすると，

(1) $l_C \leqq l_B \leqq l_A$　　(2) $s_C \leqq s_B \leqq s_A$　　が成り立つ

<(1)の証明の概要>

頂点 A の軌跡は，頂点 B を中心とする半径 c，中心角 $2\pi-2B$ の円弧と，頂点 C を中心とする半径 b，中心角 $2\pi-2C$ の円弧をつないだものであり，

$$l_A=(2\pi-2B)c+(2\pi-2C)b=2(C+A)c+2(A+B)b$$

同様に，$l_B=2(A+B)a+2(B+C)c$

よって，$l_A \geqq l_B \Leftrightarrow 2(C+A)c+2(A+B)b \geqq 2(A+B)a+2(B+C)c$

$$\Leftrightarrow (-a+b+c)A \geqq (a-b+c)B$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{B} \geqq \frac{a-b+c}{-a+b+c}=\frac{\sin A-\sin B+\sin C}{-\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}$$

$0<A \leqq B<\pi$ より，$0<\frac{A}{2} \leqq \frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$ だから，$l_A \geqq l_B \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{B}{2}}{\frac{B}{2}} \geqq \frac{\tan\frac{A}{2}}{\frac{A}{2}}$ …①

関数 $\frac{\tan\theta}{\theta}$ は，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で単調増加であるから，上式①は成り立ち，

$l_A \geqq l_B$ が成り立つ．

同様に，$l_B \geqq l_C$ も成り立ち，$l_C \leqq l_B \leqq l_A$ が示された．　<証明終>

4. 最大角 C を固定したときの三角形の形状

定理 1 より，頂点の軌跡の長さや扇形の面積の最小値を考察するのは，最大角の頂点 C についてのみ考えればよい．

［定理 2］　△ABC において，$a+b+c=1$, $A \leqq B \leqq C$ とする

C $\left(\frac{\pi}{3} \leqq C<\pi\right)$ を固定すると，次が成り立つ

(1) l_C は，$A=B=\frac{\pi-C}{2}$ のとき，最小値　$\frac{C+\pi}{1+\sin\frac{C}{2}}$　をとる

(2) s_C は，$A=B=\frac{\pi-C}{2}$ のとき，最小値　$\frac{C+\pi}{4\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)^2}$　をとる

<(1)の証明の概要>

△ABC において，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ および $a+b+c=1$ より，

$$a=\frac{\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C},\quad b=\frac{\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

が成り立つ．よって，

$$l_C=2(B+C)b+2(C+A)a=\frac{2(C+A)\sin A}{\sin(C+A)+\sin A+\sin C}+\frac{2(C+B)\sin B}{\sin(C+B)+\sin B+\sin C}$$

となり，$f(x)=\frac{2(C+x)\sin x}{\sin(C+x)+\sin x+\sin C}$

$\left(\frac{\pi}{3} \leqq C<\frac{\pi}{2}\right.$ のとき，$\pi-2C \leqq x \leqq C$，$\frac{\pi}{2} \leqq C<\pi$ のとき，$\left.0 \leqq x \leqq \pi-C\right)$

と定義すると，$l_C=f(A)+f(B)=f(A)+f(\pi-C-A)$ と表せる．

このとき，$f''(x)=\left(\sin\frac{C+x}{2}-\frac{C+x}{2}\cos\frac{C+x}{2}\right)\frac{\tan\frac{C}{2}}{\sin^3\frac{C+x}{2}}$　となり，

定義域に留意して考察することにより，$f''(x)>0$ を示すことができる．

従って，補題より $f(x)+f(\pi-C-x)$ は，定義域の中点である $x=\frac{\pi-C}{2}$ で最小値 $2f\left(\frac{\pi-C}{2}\right)=\frac{C+\pi}{1+\sin\frac{C}{2}}$ をとる．即ち，$l_C=f(A)+f(\pi-C-A)$ は，

$A=\frac{\pi-C}{2}$ のとき最小値をとり，このとき，$A=B$ である．　<証明終>

5. 最大角 C がみたす条件

定理 2 で得られた，C を固定したときの l_C，s_C の最小値を $\frac{\pi}{3} \leqq C<\pi$ で定義された変数 C の関数とみて，その最小値を求める．

［定理 3］　△ABC において，$a+b+c=1$，$A \leqq B \leqq C$ とする

$L(C)=\frac{C+\pi}{1+\sin\frac{C}{2}}$，$S(C)=\frac{C+\pi}{4\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)^2}$　$\left(\frac{\pi}{3} \leqq C<\pi\right)$

とするとき，次が成り立つ

(1) L(C) は，$\tan\frac{C+\pi}{4}=\frac{C+\pi}{2}$ をみたす C で最小値 $\frac{2}{\cos\frac{C}{2}}$ をとる

(2) S(C) は，$\tan\frac{C+\pi}{4}=C+\pi$ をみたす C で最小値 $\frac{1}{4(C+\pi)\cos^2\frac{C}{2}}$ をとる

<(1)の証明の概要>

$$L'(C)=\frac{1+\sin\frac{C}{2}-\frac{C+\pi}{2}\cos\frac{C}{2}}{\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)^2}=\frac{\cos\frac{C+\pi}{4}\left(\tan\frac{C+\pi}{4}-\frac{C+\pi}{2}\right)}{2\sin^3\frac{C+\pi}{4}}$$ より示される．

<証明終>

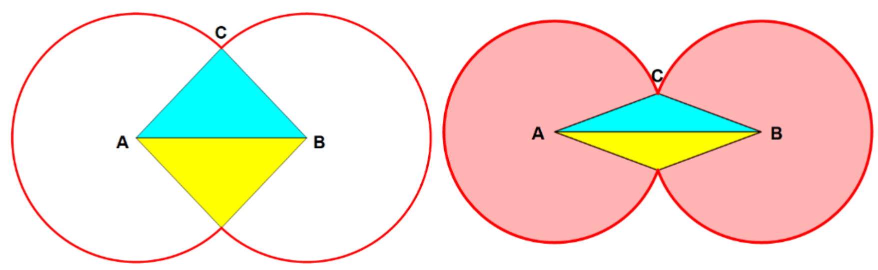
6. 研究のまとめ

定理 1，定理 2，定理 3 より，$a+b+c=1$，$A \leqq B \leqq C$ をみたす△ABC において，頂点の軌跡の長さおよび扇形の面積が最小となるのは，ともに A=B の二等辺三角形の頂点 C の軌跡であり，以下をみたす．

長さが最小となる角 C：$\tan\frac{C+\pi}{4}=\frac{C+\pi}{2}$　の解で　$C=1.520\cdots$

面積が最小となる角 C：$\tan\frac{C+\pi}{4}=C+\pi$　の解で　$C=2.431\cdots$

C がみたす 2 つの方程式は酷似しており，長さと面積の最小値の間にこのような類似の方程式が介在することは興味深い．



頂点 C の軌跡の長さ（左図）と扇形の面積（右図）が最小となる三角形の形状