数学班

‘自然数の累乗和’の累乗公式

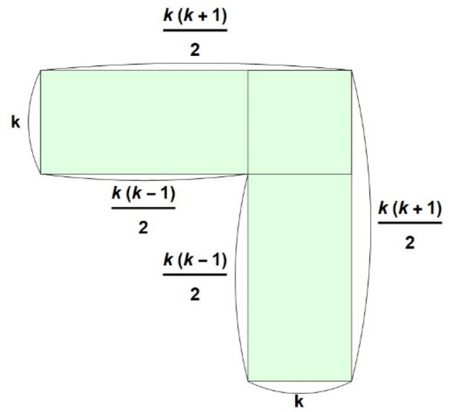
中井 平蔵・田井中 伊吹・二宮 康太郎・吉川 雄紀

１．研究の背景と目的

「数学 B」の授業では、自然数の累乗和について学習する。$S_p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ とすると、S_1 は等差数列の和として、S_2, S_3 は恒等式を利用して計算することができる。式の形から $S_1{}^2 = S_3$ という関係が成り立つが、教科書ではその図形的な背景には触れられていない。私たちは、どうしてこのような美しい関係式が成り立つのか、他にもこのような公式が存在するのかに興味を持ち、この研究を始めた。

２．方法

公式 $S_1{}^2 = S_3$ は、図のような、入れ子構造をもつかぎ型の面積を足し合わせることで、図形的に説明することができる。本研究では、この入れ子構造に着目し、この方法を以下のように拡張する。尚、計算には、数式処理ソフト *Mathematica* を用いる。



① かぎ型の幅を k から k^p, k^q に拡張し、類似の公式を導く。
② かぎ型そのものを３次元に拡張し、類似の公式を導く。
③ 次元をｍ次元に一般化し、類似の公式を導く。
④ かぎ型を構成する関数を一般化し、どのような公式が導けるか考察する。

３．結果

入れ子構造を持つかぎ型の面積を足し合わせることで、自然数の累乗和に関する公式を多数導き出すことができた。特に、正方形の面積の考察からは、$S_p{}^2$を他の累乗和で表わす‘累乗和の平方公式’が得られた。この中には、$S_3{}^2 = \frac{S_5+S_7}{2}$ という興味深いものもある。３次元の立方体の体積の考察からは、$S_p{}^3$ を他の累乗和で表わす‘累乗和の立方公式’が得られた。更に、次元をｍ次元に拡張することにより、高次のｍに対して $S_p{}^m$ を求める‘累乗和の累乗公式’も得られた。また、かぎ型を構成する関数を一般化することにより、$T_p = \sum_{k=1}^{n} k^p 2^k$ と S_p の関係式等も導けることが分かった。

4. 結論

立体の体積を、入れ子構造をもつかぎ型に分割して求める手法を用いると、単純なアルゴリズムで興味深い公式を多数導き出せることが分かった。今後は、この考えを発展させ、かぎ型以外の入れ子構造についても研究してみたい。

5. 参考文献

[1] マスオ「高校数学の美しい物語」包除原理の２通りの証明
https://mathtrain.jp/hojo
[2] 沖山翔「４次元は図示できる」
https://okiyamasho.com/?p=277