

因数の項数が単調増加数列で与えられる多項式の展開式の項数

寺井 恒輝・矢野 向葵・渡 優斗

抄録

因数の項数が等差数列で与えられる多項式の展開式の項数は簡潔な式で与えられることを知り、因数の項数をより一般化した単調増加数列で与えた場合はどのような式で与えられるのか調べた。その結果、展開式の項数を、表を書いて求める方法や、式を計算して求める方法を導き出した。現在、より簡潔な式や、一般式を探している。

1. 研究の背景と目的

先行研究では、因数の項数が初項 a 、公差 d 、項数 n の等差数列で与えられる多項式の展開式の項数は、

$$\frac{a}{a + nd} a^{a+nd} H_n$$

という非常に簡潔で美しい式で求められることが導き出された。本研究では、因数の項数をより一般的に、広義単調増加数列で与えたとき、展開式の項数がどのような式で表せるのか求めることを目的とする。

2. 方法

まず、因数の項数が等比数列で与えられる場合について考えた。因数の項数を与える数列を、初項と公比を固定したまま項数を1つ、2つ、3つ、…と変え、それぞれの場合で展開式の項数を求め、その項数がなす数列をオンライン整数列大辞典で調べた。そこでわかった、展開式の項数を導く方法が単調増加数列でも利用できることを発見した。

発見した方法やオンライン整数列大辞典にあった式、式の展開過程などから漸化式を複数求めた。

3. 結果

因数の項数が単調増加数列 $\{a_n\}$ で与えられる多項式の展開式の項数は、以下の操作をすることで求められる。

- 1行目、2行目、3行目、…にそれぞれ a_1 個、 a_2 個、 a_3 個、…の枠を書く。
- 最も上の行と最も左の列は1、枠のない部分は0として、それぞれの枠に、その枠の上と左の数字の和を書く。
- 最下行の項の和が展開式の項数となる。

{1, 2, 4, 8} の場合							
1							
1	1						
1	2	2	2				
1	3	5	7	7	7	7	7
最下行の項の和：44							

この表を活用したり、展開の方法を工夫したりすることで、複数の漸化式を導くことができた。

4. 結論

因数の項数を展開せず機械的に求める方法を複数導くことができた。しかし、求めた式はいずれも漸化式であり、一般式ではない。今後より簡潔な式や一般式を求めたい。

5. 参考文献

オンライン整数列大辞典 <https://oeis.org/A107354>

佐藤 陽人 吉田 海聖 寺井 恒輝 因数の項数が等差数列で与えられる多項式の展開式の項数 <https://mass-math.com/spi/baainokazu2/>