2945　滋賀県立彦根東高等学校

“自然数の累乗和”の累乗公式

――図形の入れ子構造を利用した公式生成アルゴリズム――

1. 自然数の累乗和

n, p を自然数とするとき，次の和を自然数の p 乗和と呼び，その総称を自然数の累乗和と呼ぶ．

$$\mathbf{S_p[n] = 1^p + 2^p + \cdots + n^p}$$

p=1, 2, 3 のときは，「数学Ｂ」の教科書[1]にあるように，それぞれ n に関する以下の多項式で表わされる．尚，特に和の項数 n を明示する必要がないときは，単に $S_p[n] = S_p$ で表わす．

$$\mathbf{p = 1} \text{ のとき，} \mathbf{S_1 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$\mathbf{p = 2} \text{ のとき，} \mathbf{S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

$$\mathbf{p = 3} \text{ のとき，} \mathbf{S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$$

2. 研究動機

p=1 および p=3 のときの式の形から，${S_1}^2 = S_3$ という関係が成り立つが，教科書ではその図形的な背景等には触れられていない．私たちは，どうしてこのような美しい関係式が成り立つのか，他にもこのような関係式が存在するのかという疑問を持ちこの研究を始めた．本研究では，式の証明は後述するが，

$${S_1}^2 = S_3,\quad {S_2}^2 = \frac{1}{3}S_3 + \frac{2}{3}S_5,\quad {S_5}^2 = -\frac{1}{6}S_7 + \frac{5}{6}S_9 + \frac{1}{3}S_{11}$$

のように，${S_p}^2$ を他の累乗和の一次結合で表わしたものを，自然数の累乗和の平方公式と呼び，${S_p}^3$ を他の累乗和の一次結合で表わしたものを，自然数の累乗和の立方公式と呼ぶ．一般に，自然数 m に対して，${S_p}^m$ を他の累乗和の一次結合で表わしたものを，自然数の累乗和の m 乗公式と呼び，それらの総称を自然数の累乗和の累乗公式と呼ぶ．

本研究では，図形的なアプローチにより，自然数の累乗和の累乗公式を生成するアルゴリズムを提案する．また，実際にそれを数式処理ソフト *Mathematica* で実装し，公式を出力する．

3. 関係式 ${S_1}^2 = S_3$ の図形的考察

図 1 の最も右側の長方形は幅が n，高さが n^2 であり，その面積は n^3 である．従って，これら n 個の長方形の面積の和は，$S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ となる．これらの長方形の列は，図 2 のように，後述するある高さで分割し，切込みを入れて折り曲げ，水平になったところで，下方に平行移動することにより，1 つの正方形に変形することができる．

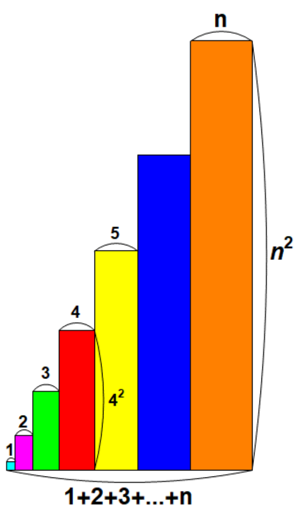

図 1：S_3を表す長方形の面積

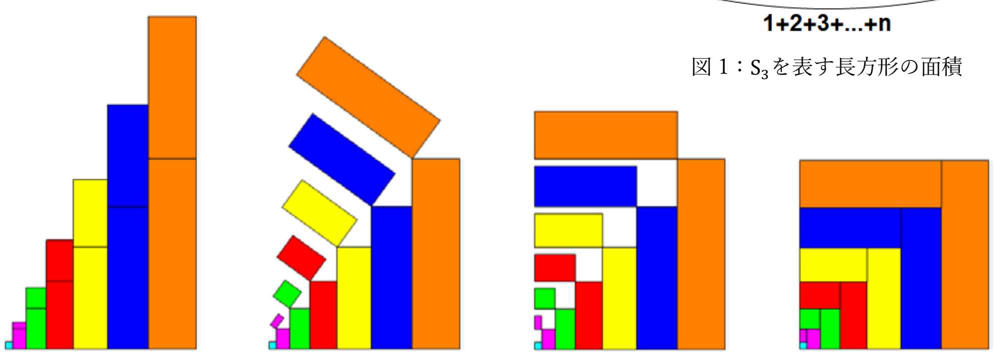
図 2：S_3を表す長方形は，ある高さで分割し，折り曲げることにより 1 つの正方形にできる

図 2 の最右図の正方形の一辺の長さは，$1 + 2 + \cdots + n = S_1$ であり，その面積は，${S_1}^2$ である．従って，関係式 ${S_1}^2 = S_3$ が成り立つことが，図形的に確かめられた．

それでは，なぜこのようにうまく折りたたむことができるのか？

その秘密はかぎ型への変形にある．k 番目の長方形の高さ k^2 に関して，

$$k^2 = f(k) + f(k-1)$$

をみたす多項式 $f(k)$ を求めると，$f(k) = k(k+1)/2$ となり，この $f(k)$ に関して，$f(k) - f(k-1) = k$ が成り立つ．

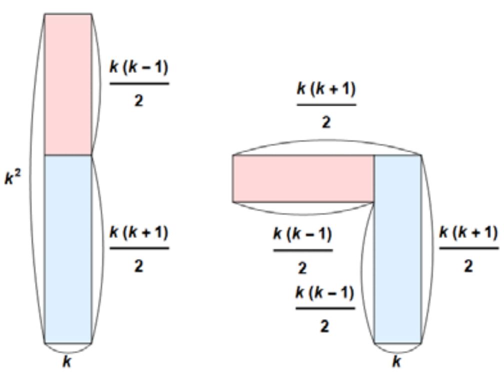

図 3：入れ子構造をもつかぎ型への変形

従って，図 3 のように，k 番目の長方形を高さが $k(k+1)/2$ のところで分割し，かぎ型をつくると，かぎ型の内側の辺の長さは $k(k-1)/2$ となり，これは $k-1$ 番目の長方形から作られるかぎ型の外側の長さと一致する．

よって，$k-1$ 番目の長方形から作られるかぎ型は，k 番目のかぎ型の内側にぴったりと入り込むことになる．ここでは，このような構造をかぎ型の入れ子構造と呼ぶ．即ち，図 3 の分割によって作られるかぎ型は k に関して入れ子構造をもち，n 個の長方形は最終的に 1 つの正方形を形作り，図 2 のような変形ができるのである．本研究では，このかぎ型の入れ子構造に着目し，これを一般化する．

4. かぎ型の一般化と公式生成のアルゴリズム

図 4 は，p, q を自然数とし，2 辺の長さが $\{k^p, S_q[k]\}$ および $\{k^q, S_p[k]\}$ である 2 つの長方形で構成されるかぎ型である．

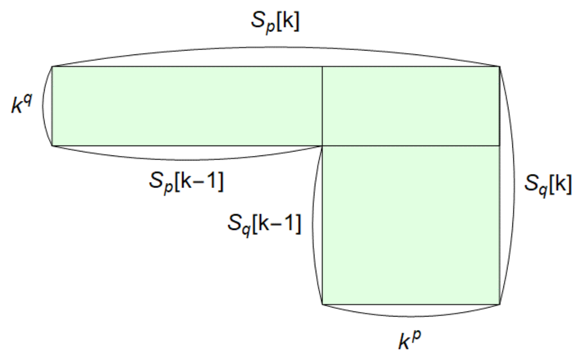

図 4：長方形の幅を k^p, k^q に拡張したかぎ型

内側の 2 辺の長さは，それぞれ $S_q[k-1]$，$S_p[k-1]$ となるため，このかぎ型は p , q の値にかかわらず常に入れ子構造をもつ．図 5 は，このかぎ型を 1≦k≦10 について 10 個描画したものであり，最終的に 1 つの長方形を形作ることが分かる．かぎ型の面積は，これを構成する 2 つの長方形の面積の和から重なった部分の面積を引けば得られ，1≦k≦n としたとき，最終的な長方形の面積に関して，

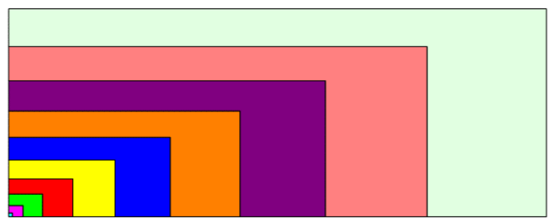
図 5：入れ子構造を持つかぎ型で構成される長方形

$$\mathbf{S_p[n]S_q[n] = \sum_{k=1}^{n}\left(k^pS_q[k] + k^qS_p[k] - k^pk^q\right)} \quad \cdots①$$

が成り立つ．これを用いると，以下のアルゴリズムで自然数の累乗和に関する 2 次の公式を得ることができる．

Algorithm 1 Formula2D	// 定義する関数名
Input：p, q	// 入力する自然数
Output：$S_pS_q = a_1S_{r_1} + a_2S_{r_2} + \cdots$	// S_pS_qの他の累乗和による一次結合
function Formula2D(p, q)	
$F_1 \leftarrow$ *Expand*$\left(k^pS_q[k] + k^qS_p[k] - k^pk^q\right)$	// $S_p[k], S_q[k]$を代入して展開
$F_2 \leftarrow$ *Replace*$(F_1,\ k^j \to S_j)$	// F_1のk^jの項をS_jで置き換え
return $S_pS_q = F_2$	// 出力される公式

結果 1 は，このアルゴリズムを *Mathematica* で実装し，1≦p≦q≦4 をみたす自然数 p , q に対して公式を出力したものである．また，結果 2 は，p=q の場合である自然数の累乗和の平方公式を 1≦p≦9 に対して出力したものである．平方公式の中には，S_5 と S_7 の平均が ${S_3}^2$ になるという興味深いものも存在する．

$$\mathbf{S_1^2 = S_3}$$
$$S_1S_2 = \frac{1}{6}(S_2 + 5S_4)$$
$$S_1S_3 = \frac{1}{4}(S_3 + 3S_5)$$
$$S_1S_4 = \frac{1}{30}(-S_2 + 10S_4 + 21S_6)$$
$$\mathbf{S_2^2 = \frac{1}{3}(S_3 + 2S_5)}$$
$$S_2S_3 = \frac{1}{12}(5S_4 + 7S_6)$$
$$S_2S_4 = \frac{1}{30}(-S_3 + 15S_5 + 16S_7)$$
$$\mathbf{S_3^2 = \frac{1}{2}(S_5 + S_7)}$$
$$S_3S_4 = \frac{1}{60}(-2S_4 + 35S_6 + 27S_8)$$
$$\mathbf{S_4^2 = \frac{1}{15}(-S_5 + 10S_7 + 6S_9)}$$

結果 1：1≦p≦q≦4 に対する 2 次の公式

$$\mathbf{S_1^2 = S_3}$$
$$S_2^2 = \frac{1}{3}(S_3 + 2S_5)$$
$$\mathbf{S_3^2 = \frac{1}{2}(S_5 + S_7)}$$
$$S_4^2 = \frac{1}{15}(-S_5 + 10S_7 + 6S_9)$$
$$S_5^2 = \frac{1}{6}(-S_7 + 5S_9 + 2S_{11})$$
$$S_6^2 = \frac{1}{21}(S_7 - 7S_9 + 21S_{11} + 6S_{13})$$
$$S_7^2 = \frac{1}{12}(2S_9 - 7S_{11} + 14S_{13} + 3S_{15})$$
$$S_8^2 = \frac{1}{45}(-3S_9 + 20S_{11} - 42S_{13} + 60S_{15} + 10S_{17})$$
$$S_9^2 = \frac{1}{10}(-3S_{11} + 10S_{13} - 14S_{15} + 15S_{17} + 2S_{19})$$

結果 2：1≦p≦9 に対する累乗和の平方公式

5. かぎ型の 3 次元への拡張

2 次元のかぎ型を 3 次元に拡張したものは，図 6 のような，三方が壁に囲まれた立体である．3 つの壁になる直方体の辺の長さをそれぞれ，$\{k^p, S_q[k], S_r[k]\}$ および $\{k^q, S_r[k], S_p[k]\}$ および $\{k^r, S_p[k], S_q[k]\}$ とすると，この立体は 2 次元のかぎ型と同様に，自然数 p, q, r の値にかかわらず，k に関して入れ子構造をもつ．図 7 はこの立体を 1≦k≦10 について 10 個描画したものであり，最終的に 1 つの直方体を形作ることが分かる．

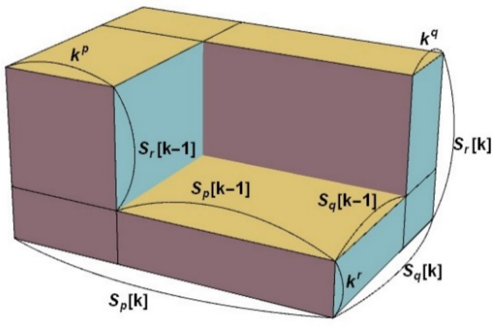

図 6：3 次元での入れ子構造を持つ立体

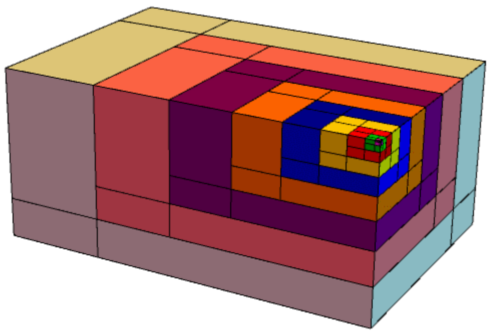

図 7：入れ子構造をもつ立体で構成される直方体

図 6 の立体の体積は，これを構成する 3 つの直方体の体積の和から，集合の包除原理を用いて，重なった部分の体積を除けば計算することができる．1≦k≦n としたとき，最終的な直方体の体積に関して，

$$\mathbf{S_p[n]S_q[n]S_r[n] = \sum_{k=1}^{n}(k^pS_q[k]S_r[k] + k^qS_r[k]S_p[k] + k^rS_p[k]S_q[k]}$$
$$\mathbf{-k^pk^qS_r[k] - k^qk^rS_p[k] - k^rk^pS_q[k] + k^pk^qk^r)}$$

が成り立つ．Algorithm 1 の 2 行目で上式を利用すれば，自然数の累乗和に関する 3 次の公式を得る．結果 3 は，p=q=r の場合である自然数の累乗和の立方公式を 1≦p≦9 に対して出力したものである．

$$S_1^3 = \frac{1}{4}(S_3 + 3S_5)$$
$$S_2^3 = \frac{1}{12}(S_4 + 7S_6 + 4S_8)$$
$$S_3^3 = \frac{1}{16}(3S_7 + 10S_9 + 3S_{11})$$
$$S_4^3 = \frac{1}{300}(S_6 - 20S_8 + 88S_{10} + 195S_{12} + 36S_{14})$$
$$S_5^3 = \frac{1}{48}(S_9 - 10S_{11} + 21S_{13} + 32S_{15} + 4S_{17})$$
$$S_6^3 = \frac{1}{588}(S_8 - 14S_{10} + 91S_{12} - 282S_{14} + 357S_{16} + 399S_{18} + 36S_{20})$$
$$S_7^3 = \frac{1}{192}(4S_{11} - 28S_{13} + 105S_{15} - 184S_{17} + 154S_{19} + 132S_{21} + 9S_{23})$$
$$S_8^3 = \frac{1}{2700}(9S_{10} - 120S_{12} + 652S_{14} - 2040S_{16} + 4104S_{18} - 4640S_{20} + 2760S_{22} + 1875S_{24} + 100S_{26})$$
$$S_9^3 = \frac{1}{400}(27S_{13} - 180S_{15} + 552S_{17} - 1110S_{19} + 1452S_{21} - 1140S_{23} + 507S_{25} + 280S_{27} + 12S_{29})$$

結果 3：1≦p≦9 に対する累乗和の立方公式

6. m 次元立方体のかぎ型への分割

2 次元と 3 次元で行った考察を，それぞれ p=q および p=q=r の場合の正方形，立方体に限定すると，面積および体積に関する関係式は，以下のようになる．

$$\mathbf{S_p{}^2 = \sum_{k=1}^{n}\{{}_2C_1S_p[k]k^p - {}_2C_2(k^p)^2\}}$$
$$\mathbf{S_p{}^3 = \sum_{k=1}^{n}\left\{{}_3C_1\left(S_p[k]\right)^2k^p - {}_3C_2S_p[k](k^p)^2 + {}_3C_3(k^p)^3\right\}}$$

この式を一般化し，自然数 m (m ≧ 2) に対して，m 次元空間における立方体をかぎ型に分割し，体積を求めることを考える．m 次元空間における立方体の体積は，$S_p{}^m$ であり，分割されるかぎ型は，1 つの辺の長さが k^p，残りの $m-1$ 個の辺の長さが $S_p[k]$ である m 個の合同な直方体で構成され，その体積は集合の包除原理を用いて，重なった部分を除けば求めることができる．

$$\mathbf{S_p{}^m = \sum_{k=1}^{n}\left\{{}_mC_1\left(S_p[k]\right)^{m-1}k^p - {}_mC_2\left(S_p[k]\right)^{m-2}(k^p)^2 + \cdots + (-1)^{m-1}{}_mC_m(k^p)^m\right\}}$$
$$\mathbf{= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}{}_mC_j\left(S_p[k]\right)^{m-j}(k^p)^j\right\}} \quad \cdots②$$

Algorithm 1 を変更して，自然数 p，m (m ≧ 2) を入力し，2 行目で上式②を用いれば，自然数の累乗和の m 乗公式を出力することができる．結果 4 は，p=1，2，3 に対して，自然数の p 乗和の 4 乗から 6 乗公式までを出力したものである．

$$S_1^4 = \frac{1}{2}(S_5 + S_7)$$
$$S_2^4 = \frac{1}{54}(S_5 + 15S_7 + 30S_9 + 8S_{11})$$
$$S_3^4 = \frac{1}{16}(S_9 + 7S_{11} + 7S_{13} + S_{15})$$
$$S_1^5 = \frac{1}{16}(S_5 + 10S_7 + 5S_9)$$
$$S_2^5 = \frac{1}{1296}(5S_6 + 130S_8 + 561S_{10} + 520S_{12} + 80S_{14})$$
$$S_3^5 = \frac{1}{256}(5S_{11} + 60S_{13} + 126S_{15} + 60S_{17} + 5S_{19})$$
$$S_1^6 = \frac{1}{16}(3S_7 + 10S_9 + 3S_{11})$$
$$S_2^6 = \frac{1}{1296}(S_7 + 40S_9 + 301S_{11} + 602S_{13} + 320S_{15} + 32S_{17})$$
$$S_3^6 = \frac{1}{512}(3S_{13} + 55S_{15} + 198S_{17} + 198S_{19} + 55S_{21} + 3S_{23})$$

結果 4：1≦p≦3，4≦m≦6 に対する p 乗和の m 乗公式

尚，関係式②は，二項定理を用いて，シグマ計算により直接証明することもできる．しかし，この式の背後には，m 次元立方体の体積を，入れ子構造をもつかぎ型に分割して求めたものであるという意味があり興味深い．

7. 研究のまとめと今後の課題

本研究で論じたような自然数の累乗和の相互関係に着目した研究としては，関係式 $S_1{}^2 = S_3$ の拡張である $\{\sum(k+a)\}^2 = \sum\{k^3 + 3ak^2 + (2a^2 - a)k - a^2\}$ や $\{\sum(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1)\}^3 = \{\sum(3k^2 - 3k + 1)\}^4$ を紹介した文献[2]や，求める公式の形を $a_1(\sum k^p)^{b_1} + a_2(\sum k^q)^{b_2} + a_3(\sum k^r)^{b_3} = 0$ に限定し，係数 a_i，b_i 等を限定した範囲から見つけ出すプログラムを開発した研究[3]等がある．

本研究では，これらとは全く異なる図形的なアプローチにより自然数の累乗和間の公式を導いた．即ち，$S_1{}^2 = S_3$ の図形的考察から得られたかぎ型の入れ子構造に着目し，これを一般化することにより，単純なアルゴリズムで自然数の累乗和に関する公式を多数導くことができた．また，分割される図形を立方体に限定し，次元を一般化することで，自然数の累乗和の累乗公式を得ることができた．

最後に，今後の課題について述べる．今回考察した 2 次元のかぎ型は，図 8 のように，構成する 2 つの長方形の 2 辺の長さを一般の関数を用いて $\{f[k], \sum g[k]\}$ および $\{g[k], \sum f[k]\}$ と一般化することができる．このときの面積の関係式は，次のようになる．

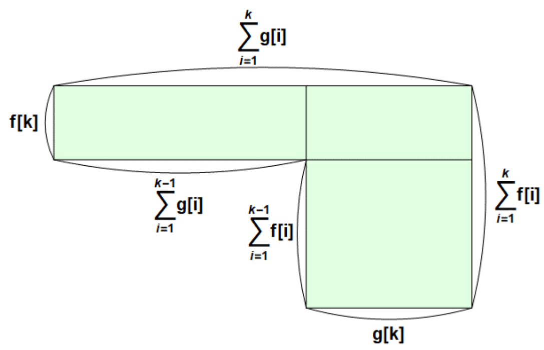

図 8：辺の長さを一般化したかぎ型

$$\mathbf{\left(\sum_{k=1}^{n} f[k]\right)\left(\sum_{k=1}^{n} g[k]\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(f[k]\sum_{j=1}^{k} g[j] + g[k]\sum_{j=1}^{k} f[j] - f[k]g[k]\right)}$$

ここで，例えば，$f[k] = 2^k$，$g[k] = k^p$ とすると，上の関係式から，自然数の累乗和 S_p と和 $T_p = \sum k^p 2^k$ の関係式を得ることができる．和 T_p については，p=1 のときが教科書[1]で取り上げられている．まず，上式より，

$$\mathbf{\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^p\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(2^k\sum_{j=1}^{k} j^p + k^p\sum_{j=1}^{k} 2^j - 2^k k^p\right)}$$

が得られ，この式を計算することにより次の式を得る．

$$\mathbf{2^nS_p = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} S_p[k]2^k + T_p\right)}$$

この式の右辺を計算すれば S_p と T_p の関係式を出力することができる．

今後の課題として，関数 f[k]，g[k] を工夫することにより，他にどのような公式が生成されるのかを考察したい．更に，この一般化したかぎ型を 3 次元に拡張することや，かぎ型以外の入れ子構造についても研究したいと考えている．

8. 参考文献

[1] 坪井俊 他 13 名．改訂版 数学 B．数研出版，2017．

[2] 稲葉芳成．自然数のべき和に関するメモⅢ．
http://izumi-math.jp/Y_Inaba/bekiwa/bekiwa3.pdf

[3] 森本竜成 他 3 名．三項間におけるシグマ関連公式～新公式発見に挑戦！～．
https://www.wakuwaku-catch.net/jirei19115/