頂点の対面への正射影が三角形の五心になる四面体の形状

滋賀県立彦根東高等学校　SS 部　数学班　細井星也　柴田昌臣

1　研究のテーマ

本研究は，2016 年度京都大学前期試験で出題された数学の入試問題を一般化したものである．

入試問題：四面体の３つの頂点から対面に下した垂線の足が対面の三角形の重心（文系：問題 4）または外心（理系：問題 3）になるならば，その四面体は正四面体であることを示せ．

⇓（一般化）

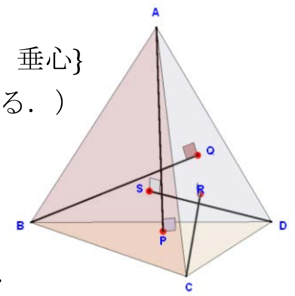
研究課題：四面体の各頂点から対面に下した垂線の足が，対面の三角形の五心のいずれかになるような四面体の有無と形状を決定する．

（補足）４つの垂線の足が三角形の五心になるという条件を K とする．

（例）K={重心，内心，外心，垂心}

（K は，${}_5H_4 = 70$通りある．）

このすべての K に対して，条件をみたす四面体が存在するかどうか，存在する場合はその形状を明らかにする．



2　研究の概要

(1)　１点が五心になる条件：【定理１】

４つの垂線の足のうち，１点 P が$\triangle BCD$の以下の五心になるとき，次の条件が成り立つ．

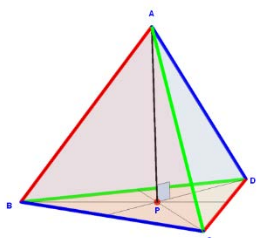
①重心：$3AB^2 + CD^2 = 3AC^2 + BD^2 = 3AD^2 + BC^2$

②外心：$AB = AC = AD$

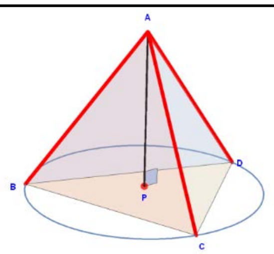
③内心：$\angle ABC = \angle ABD, \angle ACB = \angle ACD, \angle ADC = \angle ADB$

④傍心：$\angle ABC = \angle ABD$,

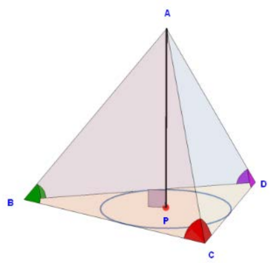
$\angle ACB + \angle ACD = \pi, \angle ADC + \angle ADB = \pi$



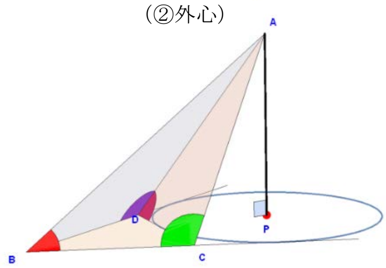
(①重心)



(②外心)



(③内心)



(④傍心)

(2)　２点が五心になる条件：

【定理２】,【定理３】,【定理４】

４つの垂線の足のうち，２点 P, Q がそれぞれ$\triangle BCD$, $\triangle ACD$ の以下の五心になるとき，次の条件が成り立つ．即ち，$BC = 1, \angle ABD = \theta$ とすると，四面体の形状は１つのパラメータ θ で決定される．①～④については，$AC = AD = BC = BD = 1$, $CD = 2\cos\theta$ に加えて以下が成り立ち，⑤は少し異なる．

①重心・重心：$AB = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

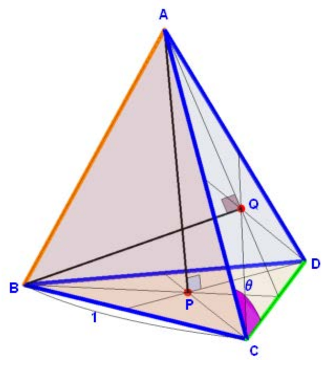
②外心・外心：$AB = 1 \quad \left(\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

③内心・内心：$AB = 2\sin\frac{\theta}{2} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

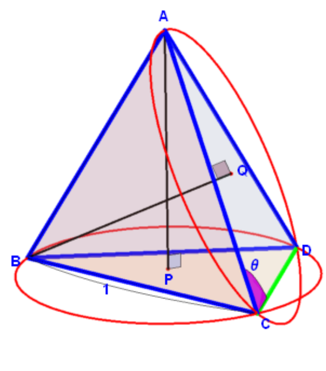
④傍心・傍心：$AB = 2\cos\frac{\theta}{2} \quad \left(\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

⑤内心・外心：$AB = BC = BD$,

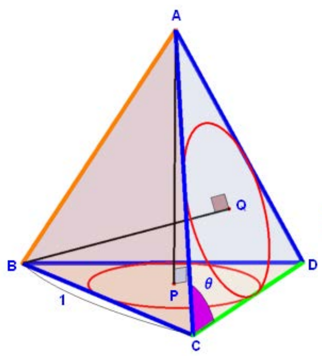
$AC = AD = 2\cos\theta, CD = 4\cos^2\theta \quad \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$



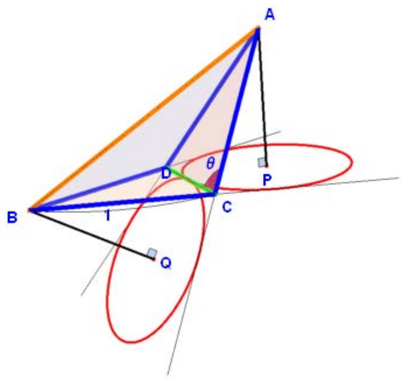
(①重心･重心)



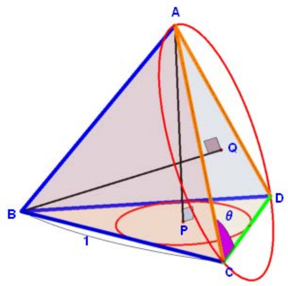
(②外心･外心)



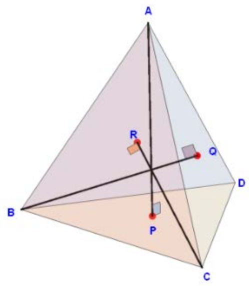
(③内心･内心)



(④傍心･傍心)



(⑤内心・外心)



(【定理５】正四面体)

(3) ３点が五心になる条件：【定理５】

この研究の出発点である入試問題を拡張した，以下の定理が成り立つ．

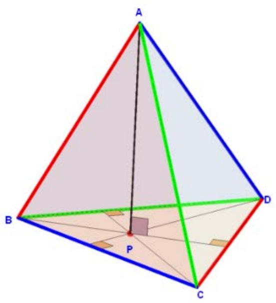
３点 P，Q，R が重心，外心，内心のいずれかならば，四面体 ABCD は正四面体である．

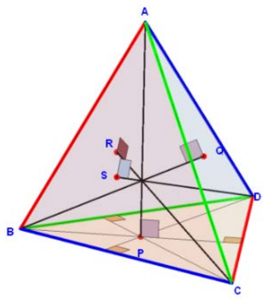
(4) １点が垂心になる条件：【定理６】

垂心については，他の４つの中心とは異なり，直辺四面体（３組の向い合う辺が互いに垂直な四面体）との間に次の定理が成り立つ．

４つの垂線の足のうち１点 P が△BCD の垂心になるための必要十分条件は，四面体 ABCD が直辺四面体であることである．

この定理により，P が垂心になるならば，残りの３つの垂線の足 Q, R, S も垂心になることが分かる．



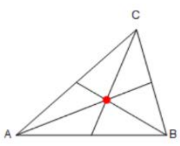


(【定理６】P が垂心 ⇒ Q, R, S も垂心)

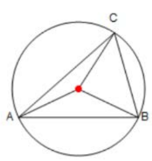
(5) 三角形の五心の相互関係：【定理７】

三角形の五心の間には，以下の性質が成り立つ．証明は，[1]にある．

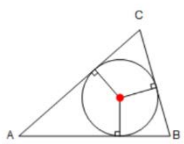
①重心，外心，内心，垂心のうち少なくとも２つが一致すればその三角形は正三角形である．
②傍心が他の４つの中心と一致することはない．



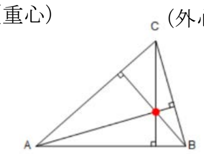
(重心)



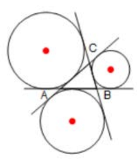
(外心)



(内心)



(垂心)



(傍心)

(6) 四面体の有無および形状の決定：

【定理８】,【定理９】,【定理 10】

定理１から定理７を基にすべての条件Ｋに対して，四面体の有無と形状を決定することができる．

以下の表は，定理８，定理９，定理 10 の結果をまとめたものである． ( ) 内の数字は条件 K の個数.

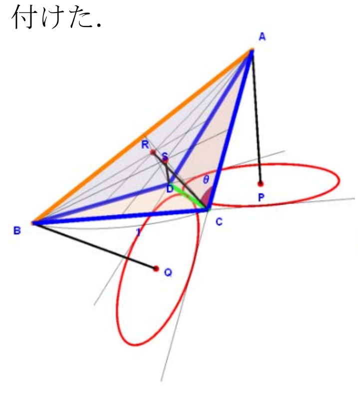
条件Ｋ ･･･
- 垂心あり
  - 傍心あり → 存在しない （15）
  - 傍心なし
    - 重・内・外心2，3個 → 正四面体 （16）
    - 重・内・外心1個 → 正三角錐 （3）
    - 重・内・外心なし → 直辺四面体 （1）
- 垂心なし
  - 傍心1，3，4個 → 存在しない （14）
  - 傍心なし → 正四面体 （15）
  - 傍心2個
    - 重心2個 → 傍心重心四面体 （1）
    - 内心2個 → 傍心内心四面体 （1）
    - その他 → 存在しない （4）

(7) 条件をみたす正四面体以外の四面体

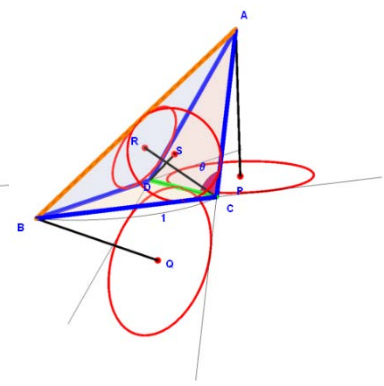
正四面体以外で条件をみたす四面体は，以下の４種類である．

①直辺四面体：K= {垂心，垂心，垂心，垂心}
②正三角錐：K= {垂心，垂心，垂心，重・内・外心}
③傍心重心四面体：K= {傍心，傍心，重心，重心}
④傍心内心四面体：K= {傍心，傍心，内心，内心}

K が傍心を２つ含む場合③④の四面体の形状は興味深い．特に，④は，２種類の二等辺三角形の面で構成されるが，その辺の比が両方とも黄金比になるという美しい性質を持っており，別名黄金四面体と名付けた．



(③傍心重心四面体)



(④傍心内心四面体)
(黄金四面体)

３ 参考文献

[1] JMO 夏季セミナー第 40 回問題解説
(http://jmoss.jp/mon/solutions/b040.pdf)